TD φ 11 : Cinématique

Exercice 1 : Elements cinématiques en coordonnées cartésiennes

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes sont, à chaque instant :

$$x(t) = a_0 t^2 + x_0 \ , \ y(t) = -v_0 t \text{ et } z(t) = z_0$$

avec $x_0 = 1$ m, $z_0 = -1$ m, $a_0 = 2 m.s^{-2}$ et $v_0 = 3 m.s^{-1}$.

1. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cartésienne.
2. Calculer la norme de la vitesse de M à la date $t = 2$ s.
3. Calculer la norme de l'accélération de M à la date $t = 1$ s.

Exercice 2 : Freinage d'urgence

Une voiture, animée d'une vitesse $v_0 = 90\ km.h^{-1}$ sur une trajectoire rectiligne freine avec une décélération constante de norme $a_0 = 4.2\ m.s^{-2}$.

Calculer la durée et la distance de freinage.

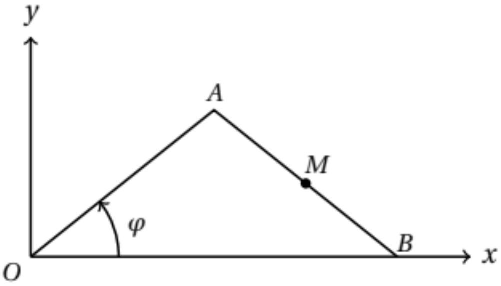
Exercice 3 : Cardioïde

On considère un point mobile M se déplaçant le long d'une courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = a(1 + \cos(\theta))$ appelée cardioïde.

1. En plaçant les points correspondants à $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $\theta = \pi$, $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ... $\theta = 2\pi$ dans le plan Oxy, représenter la cardioïde.
2. En un point P quelconque de la cardioïde, représenter θ, ρ ainsi que les vecteurs de base $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$.
3. La cardioïde est parcourue à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ constante. A $t = 0$, $\theta(0) = 0$.
   (a) Déterminer la vitesse du point M dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$.
   (b) Représenter la vitesse $\vec{v}(M)$ du point M lorsqu'il se situe au point P de la cardioïde.
   (c) En quel point de la trajectoire la norme v de la vitesse de M est-elle maximale ?

Exercice 4 : Rotation et translation

Soit le système ci-contre, constitué de deux tiges identiques OA et AB, de longueur $2a$, articulées en A. La tige OA peut pivoter autour du point O, et l'extrémité de la tige AB peut coulisser le long de l'axe (Ox). L'angle φ suit la loi horaire $\varphi(t) = \omega t$ où ω est une constante.



1. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du milieu M de AB. Tracer l'allure de cette trajectoire.
   On pourra commencer par déterminer les coordonnées x et y de M puis en déduire l'équation de la trajectoire.
2. Déterminer l'accélération du point M.

Exercice 5 : Sur un toboggan

Un jeune enfant, assimilable à un point matériel M, est installé, prêt à partir, en haut d'un grand toboggan d'un parc aquatique.
A partir de l'instant $t = 0$, les équations horaires de M sont, en coordonnées cartésiennes :

$$x = R\cos(\omega t) \ , \ y = R\sin(\omega t) \text{ et } z = -bt$$

avec R, ω et b des constantes positives.

1. Déterminer ses coordonnées cylindriques.
2. Déterminer la nature du mouvement.
3. Déterminer la norme de la vitesse de M.
4. Déterminer la norme de l'accélération de M.

Exercice 6 : Balle lancée vers le ciel

Un homme situé au sommet d'un immeuble lance une balle vers le ciel, à la verticale, avec une vitesse initiale de 15 $m.s^{-1}$. La boule atteint le sol 4.25 s plus tard. L'accélération de la balle est l'accélération du champ de pesanteur $g = 10\ m.s^{-2}$.

1. Quelle est la hauteur de l'immeuble ?
2. Avec quelle vitesse la boule atteint-elle le sol ?
3. Quelle est la hauteur maximale atteinte par la balle ?

Exercice 7 : Distance de sécurité

Deux voitures, distantes de $d = 80$ m, se suivent en roulant à la vitesse $v = 130\ km.h^{-1}$. A $t_0 = 0$ s, la voiture A_1 de tête freine avec une décélération constante $a = -10,0\ m.s^{-2}$. La voiture A_2, qui suit, freine à $t_1 = 3$ s avec une décélération $b = -15,0\ m.s^{-2}$.

1. Déterminer les équations horaires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des voitures pour différents intervalles de temps que l'on explicitera.
2. Y-a-t-il collision entre les deux voitures ? Si oui, déterminer l'instant τ, le lieu x_0 du choc et la vitesse relative v_{rel} du choc.

Exercice 8 : Mouvement d'un point d'une roue

Une roue de vélo de rayon R roule sans glisser sur un plan horizontal. Le centre C de la roue décrit un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v_0. On s'intéresse à un point P de la périphérie de la roue, initialement en contact avec le sol. On note T la période de révolution de P dans le référentiel du vélo.

1. Déterminer les équations horaires et les expressions des vecteurs cinématiques du mouvement de P dans le référentiel terrestre.
2. Caractériser le mouvement.

Problème :

Combien de "g" ressent un conducteur qui freine sur une distance de 10 m alors qu'il roulait à 50 $km.h^{-1}$?