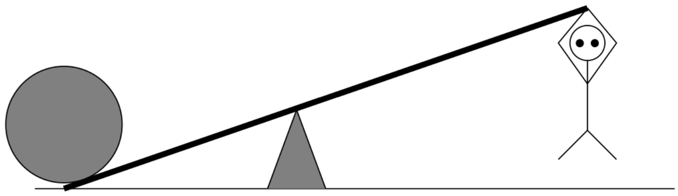
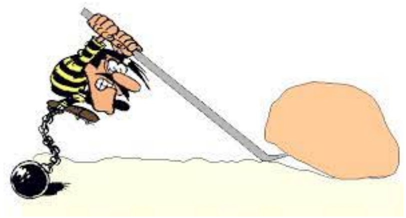
TD φ 17 : Mouvement d'un solide

Exercice 1 : Soulever un rocher

Un prisonnier de 25 kg cherche à soulever un rocher de 200 kg sous lequel est caché une pépite d'or. Pour cela, il utilise un levier constitué d'une tige de longueur $L = 10$ m et d'un support de hauteur $h = 20$ cm.

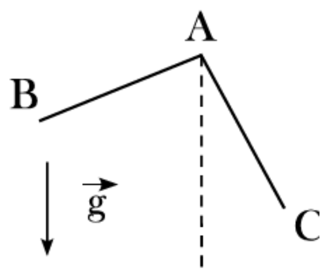


1. Le prisonnier se suspend verticalement au levier. Quelle doit être la distance entre lui et le support pour soulever le rocher ?
2. Quelle est la direction de la force à appliquer pour être le plus efficace ?



Exercice 2 : Pendule en L

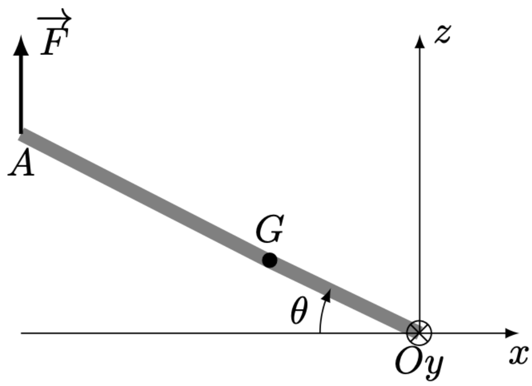
Un pendule pesant est constitué de deux tiges homogènes orthogonales identiques AB et AC (masse m, longueur L) formant un ensemble rigide pouvant tourner autour d'un axe orthogonal au pendule passant par A, fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen. La liaison pivot en A est supposée idéale.



Exprimer la période des petites oscillations du système (le moment d'inertie d'une tige par rapport à l'axe de rotation passant par A vaut $J = \frac{1}{3}mL^2$.

Exercice 3 : Monter un mur

On utilise une grue pour dresser un mur en béton préfabriqué à la verticale. Le mur est initialement posé sur le sol ($\theta = 0$). La grue le soulève en exerçant une force $\vec{F}$ toujours verticale et appliquée en A. Le mur pivote alors autour de l'axe (Oy) fixe.
Le mur est de hauteur $H = OA = 3,0$ m, de masse $m = 5,0 \times 10^3$ kg et son centre de masse G se situe à $OG = a = 1,2$ m de la base. Le moment d'inertie du mur par rapport à l'axe (Oy) est $J_{Oy} = 2,8 \times 10^3$ $kg.m^2$. On néglige tous les frottements.



1. Faire un bilan des actions mécaniques exercées sur le mur.
2. Appliquer la loi du moment cinétique au mur par rapport à l'axe Oy. En déduire l'équation différentielle vérifiée par θ.
3. Le mur pivote autour de sa base (Oy) avec une vitesse angulaire $\dot{theta} = \omega = 0,2\ rad.s^{-1}$ constante. Déterminer et calculer la norme de la force exercée par la grue.
4. Exprimer la puissance de la force $\vec{F}$ puis le travail W effectué par la grue pour dresser le mur à la verticale. Calculer W.

Exercice 4 : Approche énergétique du pendule pesant

Un pendule pesant est constitué d'une tige homogène de masse m et de longueur l en pivot parfait autour de l'axe Ox. La barre étant homogène, le centre d'inertie se trouve en son milieu. Sa position est repérée par l'angle θ. Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Ox est $J_{(Ox)} = \frac{1}{3}ml^2$.

1. Quelles sont les actions extérieures subies par la tige ? Calculer leur puissance.
2. En déduire les positions d'équilibre et leur stabilité.
3. Evaluer l'énergie cinétique de la tige à un instant quelconque.
4. Faire de même avec son énergie potentielle de pesanteur.
5. En déduire l'équation du mouvement de la tige par méthode énergétique. Montrer que l'application du théorème du moment cinétique par rapport à (Ox) donne exactement la même équation.
6. La résoudre dans le cadre des petites oscillations sachant qu'initialement la tige est dans la position verticale $\theta = 0$, avec une vitesse angulaire $\omega_0 > 0$. Donner une condition sur ω_0 pour être effectivement dans cette approximation.
7. On ne se place plus forcément dans le cadre des petites oscillations. En faisant une étude énergétique, montrer que suivant les valeurs de ω_0, deux types de mouvement sont possible. Les décrire. Quelle valeur de ω_0, notée ω_c, est à la limite des deux situations ?

Exercice 5 : Chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5°$ avec la verticale et est immobile. On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité $J = \frac{1}{3}mL^2$

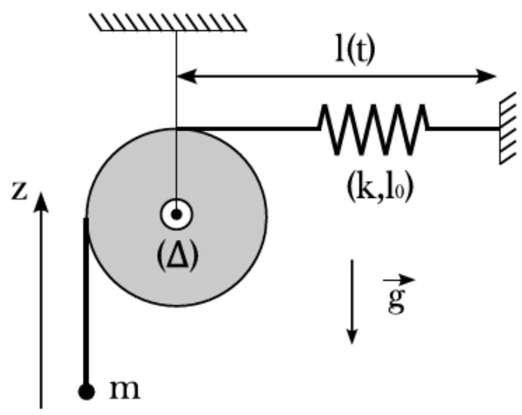
1. Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}\left(\cos(\theta_0) - \cos(\theta)\right)}$$

3. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On donne $\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0)-\cos(\theta)}} = 4.9$

Exercice 6 : Mouvement d'un système poulie+ressort

Dans le dispositif représenté ci-contre, le fil est inextensible et sans masse. Le ressort est élastique (raideur k, longueur à vide l_0) et la poulie possède une masse M, un rayon R et un moment d'inertie $J_\Delta = \frac{1}{2}MR^2$ par rapport à son axe de rotation (Δ) (la liaison entre la poulie et l'axe est parfaite). Le mouvement de rotation de la poulie est supposé toujours suffisamment faible pour considérer à tout instant que le ressort est horizontal et que le mouvement de la masse m est vertical.



Etablir l'expression de la période des oscillations du système.