

Corrigé DS8

Exercice A.1 : De la Terre à la Lune

A.1.I.1.a) $\vec{F}_G = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r}$

A.1.I.1.b) Dans ce cas $\vec{r} = \overrightarrow{TM}$ d'où $\vec{F} = -\frac{Gm_Fm_T}{r^3}\overrightarrow{TM}$

A.1.I.2.a) On a $-dE_P = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$ ou réciproquement $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_P)$. Dans les deux cas, on aboutit à $-\frac{dE_P}{dr} = -\frac{Gm_Fm_T}{r^2}$ d'où, par intégration, avec l'origine des potentiels à l'infini : $E_{P0}(r) = -\frac{Gm_Fm_T}{r}$

A.1.I.2.b) En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport au centre de la terre T, fixe dans le référentiel géocentrique, on a $\frac{dL_T(M)}{dt} = \overrightarrow{M}_T(\vec{F})$. Or, \vec{F} est une force centrale donc $\overrightarrow{M}_T(\vec{F}) = \vec{0}$ d'où la conservation du moment cinétique.

De plus, $\overrightarrow{L}_T(M) = \overrightarrow{TM} \wedge m\vec{v}$ donc $\overrightarrow{L}_T(M)$ est orthogonal au vecteur position \overrightarrow{TM} et au vecteur vitesse \vec{v} . Ce moment cinétique étant une constante vectorielle du temps, il en résulte que le mouvement se fait dans un plan orthogonal au moment cinétique et contenant les vecteurs position initiale \overrightarrow{TM}_0 et vitesse initiale \vec{v}_0 .

Selon la valeur de l'énergie mécanique la trajectoire pourra être circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique. L'énoncé nous parle d'orbite, ce qui limite les trajectoires à circulaire ou elliptique.

A.1.I.2.c) La trajectoire étant circulaire, on a l'accélération $\vec{a} = -\frac{v_0^2}{r}\vec{e}_r$. Par application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel géocentrique, on obtient : $-m_F\frac{v_0^2}{r} = -\frac{Gm_Fm_T}{r^2}\vec{e}_r$ soit $v_0 = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}}$.

On en déduit $E_C = \frac{1}{2}m_Fv_0^2 = \frac{Gm_Fm_T}{2r}$

A.1.I.2.d) On a $T = \frac{2\pi r}{v_0}$ soit $T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{Gm_T}{r}}}$. On aboutit à $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_T}$. Il s'agit de la troisième loi de Kepler.

A.1.I.2.e) On trouve $v_0 = 7,9 \text{ km.s}^{-1}$ et $T = 5,1 \times 10^3 \text{ s}$

A.1.I.2.f) On a $E_{m0} = E_C + E_{P0} = \frac{Gm_Tm_F}{2r} - \frac{Gm_Fm_T}{r} = -\frac{Gm_Tm_F}{2r}$. On identifie $K = Gm_Fm_T$.

A.1.II.1.a) D'après la question précédente, on aura $E_{m1} = -\frac{Gm_Fm_T}{2a} = -\frac{Gm_Fm_T}{d_{TL}}$

A.1.II.1.b) Au moment où on arrive sur l'orbite, on a donc $E_{m1} = -\frac{Gm_Fm_T}{d_{TL}}$ mais on a aussi $E_{m1} = E_C + E_P = \frac{1}{2}m_Fv_1^2 - \frac{Gm_Fm_T}{R_T^2}$. En égalisant les deux expressions, on aboutit à $v_1 = \sqrt{2Gm_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{d_{TL}}\right)}$. L'application numérique donne $v_1 = 11 \text{ km.s}^{-1}$.

A.1.II.1.c) La Terre est placée au foyer de l'ellipse. On doit allumer les moteurs quand le satellite, la Terre et la Lune sont alignés.

A.1.II.1.d) Par application de la troisième loi de Kepler, on a $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_T}$ où T est la période de révolution sur l'ellipse. Ici $t_1 = \frac{T}{2}$ d'où $t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2\left(\frac{d_{TL}}{2}\right)^3}{Gm_T}}$. L'application numérique donne $t_1 = 4 \text{ jours } 18 \text{ h}$.

A.1.II.2.a) Pour passer d'un état lié elliptique à un état lié circulaire, il faut diminuer l'énergie mécanique donc à énergie potentielle égale, il faut diminuer l'énergie cinétique et donc freiner.

A.1.II.2.b) D'après la question A.1.I.2.c), on a $v_2 = \sqrt{\frac{Gm_L}{R_L}}$ soit $v_2 = 1,7 \text{ km.s}^{-1}$.

Exercice A.2 : Acidité des eaux de pluie

A.2.A.1 Pour l'équilibre $CO_2(g) \rightleftharpoons CO_2(aq)$, on a $K_3 = \frac{a(CO_2(aq))}{a(CO_2(g))}$

La mise en solution de l'acide de l'eau est modélisée par $CO_2(aq) + 2H_2O(l) \rightleftharpoons HCO_3^-(aq) + H_3O^+(aq)$.

Donc $K_{a1} = \frac{a(HCO_3^-(aq)) \times a(H_3O^+(aq))}{a(CO_2(aq)) \times a(H_2O(l))^2}$

Enfin, à l'équilibre $CO_2(g) + 2H_2O(l) \rightleftharpoons HCO_3^-(aq) + H_3O^+(aq)$ est associée la constante

$$K_2 = \frac{a(HCO_3^-(aq)) \times a(H_3O^+(aq))}{a(CO_2(g)) \times a(H_2O(l))^2} \times \frac{a(CO_2(aq))}{a(CO_2(aq))} = \frac{a(HCO_3^-(aq))a(H_3O^+(aq))a(CO_2(aq))}{a(H_2O(l))^2 a(CO_2(aq))a(CO_2(g))} = K_{a1}K_3$$

L'application numérique donne $K_2 = 1,43 \times 10^{-8}$.

A.2.A.2 A l'équilibre $K_2 = \frac{a(HCO_3^-(aq)) \times a(H_3O^+(aq))}{a(CO_2(g)) \times a(H_2O(l))^2} = \frac{[HCO_3^-]_{eq}[H_3O^+]_{eq}}{\frac{P(CO_2)}{p^0} C^{02}}$. On note $h = [H_3O^+]_{eq}$ et on a de plus $[HCO_3^-]_{eq} = h$ d'où $K_2 = \frac{h^2 P^0}{P(CO_2) C^{02}}$.

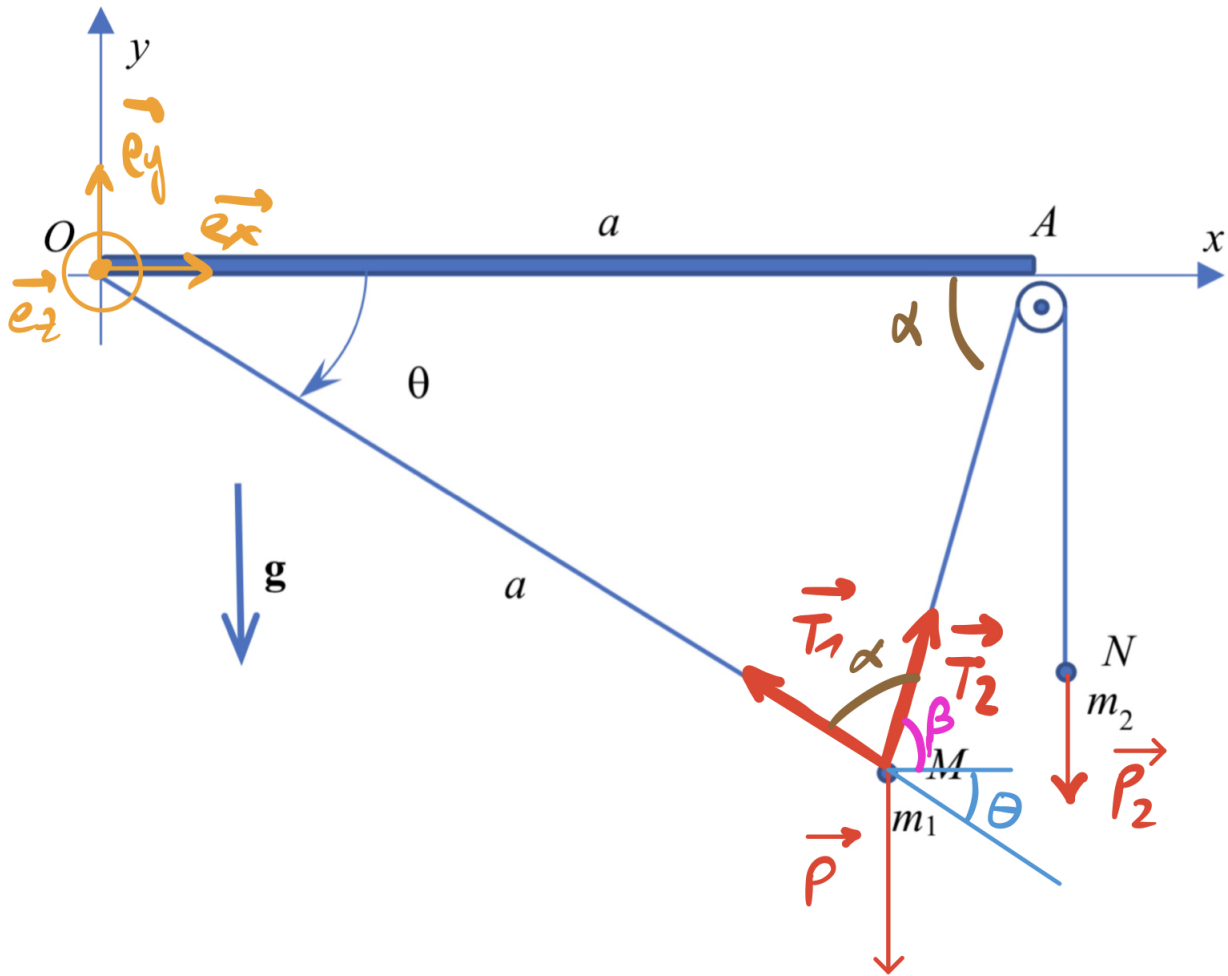
Bilan : $h = C^0 \sqrt{\frac{P(CO_2) K_2}{P^0}}$. On trouve alors $h = 2,38 \times 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$ soit un $pH = 5,62$.

A.2.A.3 De la même manière on trouve un $pH = 5,57$ soit une diminution du pH, ce qui correspond bien à une acidification des eaux de pluie.

A.2.B.1 De manière sensiblement équivalente que dans la première partie, on trouve $K_{2'} = K_{a1'} K_{3'} = 0,0204$.

A.2.B.2 On trouve $h = C^0 \sqrt{\frac{P(SO_2) K_{2'}}{P^0}}$ soit $h = 6,39 \times 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$ soit un $pH = 5,19$. Les eaux de pluie sont dans ce cas encore plus acides et le soufre influe plus sur l'acidité des eaux de pluie que le dioxyde de carbone.

Exercice A.3



A.3.1 On a $\vec{P} = m_1 \vec{g} = -m_1 g \vec{e}_y$

A.3.2 Le fil étant sans masse et la poulie parfaite, on a nécessairement $\|\vec{T}_2\| = \|\vec{P}_2\|$ soit $\|\vec{T}_2\| = m_2 g$. On a les projections $\vec{T}_2 \cdot \vec{e}_x = \cos \beta$ (voir figure) et $\vec{T}_2 \cdot \vec{e}_y = \sin \beta$. D'où $\vec{T}_2 = m_2 g (\cos \beta \vec{e}_x + \sin \beta \vec{e}_y)$. Enfin, $\beta = \pi - \theta - \alpha$ avec, dans OAM, $\pi = \theta + 2\alpha$. Bilan : $\alpha = \frac{\pi - \theta}{2}$ et $\beta = \pi - \theta - \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{\pi - \theta}{2}$ et alors $\cos \beta = \sin \frac{\theta}{2}$ et $\sin \beta = \cos \frac{\theta}{2}$. On aboutit à $\vec{T}_2 = m_2 g (\sin \frac{\theta}{2} \vec{e}_x + \cos \frac{\theta}{2} \vec{e}_y)$

A.3.3 La masse m_1 étant au repos, on a $\vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$ soit $\vec{T}_1 = -\vec{P} - \vec{T}_2$. On obtient : $\vec{T}_1 = -m_2 g \sin \frac{\theta}{2} \vec{e}_x + (-m_2 g \cos \frac{\theta}{2} + m_1 g) \vec{e}_y$

A.3.4 On a $\vec{OM} = a \cos \theta \vec{e}_x - a \sin \theta \vec{e}_y$ d'où $\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = -m_1 g a \cos \theta \vec{e}_z$

A.3.5 $\vec{M}_O(\vec{T}_1) = \vec{0}$ car $\vec{OM} // \vec{T}_1$

A.3.6 $\vec{M}_O(\vec{T}_2) = \vec{OM} \wedge \vec{T}_2 = m_2 g a (\cos \theta \cos \frac{\theta}{2} + \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}) \vec{e}_z = m_2 g a \cos(\theta - \frac{\theta}{2}) \vec{e}_z = m_2 g a \cos \frac{\theta}{2} \vec{e}_z$

A.3.7 A l'équilibre de rotation, on a donc : $\vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{T}_1) + \vec{M}_O(\vec{T}_2) = \vec{0}$ soit : $m_2 g a \cos \frac{\theta}{2} - m_1 g a \cos \theta = 0$ et encore $m_1 \cos \theta - m_2 \cos \frac{\theta}{2} = 0$

On a également $\cos \theta = 2(\cos \frac{\theta}{2})^2 - 1$ et, en posant $X = \cos \frac{\theta}{2}$, on aboutit à l'équation : $2m_1 X^2 - m_2 X - m_1 = 0$. Cette équation admet des solutions réelles si le discriminant $\Delta \geq 0$ soit $m_2^2 + 8m_1^2 \geq 0$ ce qui est toujours le cas avec des masses positives.

A.3.8 Dans notre situation $\cos \frac{\theta}{2} > 0$ d'où $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{m_2 + \sqrt{m_2^2 + 8m_1^2}}{4m_1}$

Exercice B.1

B.1.1 On applique le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe fixe (Oz) dans le référentiel terrestre : $\frac{dL_{Oz}}{dt} = M_{Oz}(\vec{P}) + M_{Oz}(pivot)$.

Avec :

- $L_{Oz} = J\dot{\theta}$
- $M_{Oz}(pivot) = 0$ car pas de frottements au niveau de l'axe de rotation.
- $M_{Oz}(\vec{P}) = -mga \sin \theta$ par méthode du bras de levier.

Bilan : $J\ddot{\theta} = -mga \sin \theta$. Pour de petites oscillations autour de $\theta_{eq} = 0$, on aboutit à $\ddot{\theta} + \frac{mga}{J}\theta = 0$. On en déduit la pulsation de l'oscillateur $\omega = \sqrt{\frac{mga}{J}}$ et enfin la période des petites oscillations $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}$.

B.1.2 On a $\frac{dT}{T} = -\frac{dg}{2g}$ d'où $s = -\frac{\Delta g}{2g}$

B.1.3 On a $E_m = E_{C,rot} + E_P + E_{P,pes} = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} K\theta^2 + mga \cos \theta + cte$.

Le problème est conservatif donc $\frac{dE_m}{dt} = 0$ soit $J\dot{\theta}\ddot{\theta} + K\dot{\theta}\theta - mga\dot{\theta} \sin \theta = 0$. Enfin, on a l'équation du mouvement :

$$J\ddot{\theta} + K\theta - mga \sin \theta = 0$$

B.1.4 Dans le cas de petites oscillations autour de $\theta_{eq} = 0$, on a $\sin \theta \approx \theta$ soit $J\ddot{\theta} + (K - mga)\theta = 0$. On a $\frac{dE_p}{d\theta} = K\theta - mga$ et donc $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = K - mga$. Pour avoir un équilibre stable en $\theta = 0$, il faut que $K > mga$, ce qui est cohérent car dans ce cas "le rappel est plus fort que la pesanteur".

Dans ce cas $\omega = \sqrt{\frac{K-mga}{J}}$ et $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K-mga}}$

B.1.5 On a cette fois $\frac{dT}{T} = \frac{ma}{2(K-mga)}dg$, ce qui conduit à $s_1 = \frac{ma}{2(K-mga)}\Delta g$

B.1.6 On veut des plus grandes variations de champ de pesanteur dans le deuxième cas soit $\Delta g_1 > \Delta g$ soit $s_1 > |s|$ Ce qui implique, après résolution, $K < 2mga$. En conclusion, on choisit les paramètres tels que $mga < K < 2mga$.

Exercice B.2 : Le sulfate de baryum

Dans toute la correction, on considère les concentrations en $mol.L^{-1}$ de sorte à ne pas adimensionner les quotients de réaction avec des $C^0 = 1 mol.L^{-1}$.

B.2.1.a A l'équilibre, lorsque le solide existe, on a $K_S = [Al^{3+}][HO^-]^3$. En solution aqueuse, on a $K_e = [HO^-][H_3O^+]$. En posant $h = [H_3O^+]$, on a donc $K_S = \frac{[Al^{3+}]K_e^3}{h^3}$ soit $[Al^{3+}] = \frac{K_S h^3}{K_e^3}$

B.2.1.b De même, à l'équilibre, lorsque le solide est présent $K = \frac{[Al(OH)_4^-]}{[HO^-]} = \frac{[Al(OH)_4^-]h}{K_e}$ soit :

$$[Al(OH)_4^-] = \frac{K K_e}{h}$$

B.2.1.c On a l'équation de mise en solution de l'acide dans l'eau :



Ainsi : $K_A = \frac{[Al(OH)^{2+}]h}{[Al^{3+}]}$. Il vient $[Al(OH)^{2+}] = \frac{K_A}{h}[Al^{3+}]$ et donc $[Al(OH)^{2+}] = \frac{K_A}{h} \times \frac{K_S h^3}{K_e^3}$.

Bilan : $[Al(OH)^{2+}] = \frac{K_A K_S h^2}{K_e^3}$

B.2.1.d On a $s = [Al^{3+}] + [Al(OH)_4^-] + [Al(OH)^{2+}]$. Donc $x_1 = \frac{[Al^{3+}]}{s} = \frac{[Al^{3+}]}{[Al^{3+}] + [Al(OH)_4^-] + [Al(OH)^{2+}]}$ que l'on réécrit :

$$x_1 = \frac{1}{1 + \frac{[Al(OH)_4^-]}{[Al^{3+}]} + \frac{[Al(OH)^{2+}]}{[Al^{3+}]}}$$

A l'aide des questions précédentes, on obtient :

$$x_1 = \frac{1}{1 + \frac{K K_e^4}{K_S h^4} + \frac{K_A}{h}}$$

En appliquant la même méthode, on obtient :

$$x_2 = \frac{1}{1 + \frac{h}{K_A} + \frac{K K_e^4}{K_A K_S h^3}}$$

$$x_3 = \frac{1}{1 + \frac{K_S h^4}{K K_e^4} + \frac{K_A K_S h^3}{K K_e^4}}$$

B.2.2 La courbe A correspond à l'espèce qui prédomine au pH le plus faible. Il s'agit donc de Al^{3+} . La courbe B correspond à l'espèce qui prédomine au pH le plus fort, il s'agit donc de $Al(OH)_4^-$. Enfin, la courbe C correspond à l'espèce intermédiaire $Al(OH)^{2+}$.

B.2.3.a La première réaction de précipitation est $Al^{3+} + 3HO^- = Al(OH)_3(s)$. A la limite de précipitation, on a $K_S = [Al^{3+}][HO^-]^3 = \frac{[Al^{3+}]K_e^3}{h^3}$. On fait alors l'hypothèse qu'à ce pH tout l'aluminium est sous forme d'ions Al^{3+} ce qui implique $[Al^{3+}] = c_0$. Il vient alors : $pH_1 = pK_e + \frac{1}{3}(pC - pK_S) = 3,4$. On vérifie à l'aide du graphe fourni que tout l'aluminium est bien sous forme d'ions Al^{3+} à ce pH.

Lorsque le pH augmente, le précipité se dissout selon l'équation $Al(OH)_3 + HO^- = Al(OH)_4^-$. A la limite de la disparition du précipité on a $K = \frac{[Al(OH)_4^-]}{[HO^-]} = \frac{[Al(OH)_4^-]h}{K_e}$. A la limite de disparition du précipité, on fait l'hypothèse que tout l'aluminium est sous forme d'ions $Al(OH)_4^-$ soit $[Al(OH)_4^-] = c_0$. On en déduit

$pH_2 = pK + pK_e - pC = 10,7$. On remarque qu'à ce pH tout l'aluminium est bien sous forme $Al(OH)_4^-$, ce qui valide notre hypothèse.

B.2.3.b On cherche la valeur de h pour laquelle la solubilité est la plus petite soit $\frac{ds}{dh} = 0$. Or on a établi que $s = [Al^{3+}] + [Al(OH)_4^-] + [Al(OH)^{2+}] = \frac{K_s h^3}{K_e^3} + \frac{KK_e}{h} + \frac{K_A K_S h^2}{K_e^3}$

Ainsi $\frac{ds}{dh} = \frac{3K_S h^2}{K_e^3} - \frac{KK_e}{h^2} + \frac{2K_A K_S h}{K_e^3}$

Une résolution numérique de cette calculatrice donne $pH_3 = 5,5$.

B.2.3.c La solubilité est minimale à $pH = 5,5$. Le calcul de la solubilité à ce pH donne $s_m = 4,5 \times 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$. Si la concentration initiale en aluminium est inférieure à cette valeur, il n'y aura jamais formation de précipité.